# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
# – FAZA PE SECTOR –
# BUCUREŞTI 21.02.2004

**Clasa a XI-a**

**Subiectul I**

**a.** Fie $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ fixat şi $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive pentru care $x_{n+1}^k \leq kx_n + 1 - k,\ \forall n \geq 1$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se determine limita sa.

**b.** Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o funcţie neconstantă şi mărginită într-o vecinătate a originii, cu proprietatea că există $a \in (0,1)$, $b \in (1,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = bf(ax) + c,\ x \in \mathbb{R}$. Să se arate că dacă există $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ atunci *f* este continuă în $x = 0$.

Costel Chiteş şi Marcel Chiriță

**Subiectul II**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi mulțimea $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid XA = AX\}$.

**a.** Să se arate că dacă $X \in C(A)$ atunci există $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = aI_3 + bA + cA^2$.

**b.** Să se arate că dacă $X \in C(A)$ şi $X^{2004} = 0_3$ atunci $X = 0_3$.

Ion Savu

**Subiectul III**

Fie dreptele $d_1,\ d_2$ ale căror ecuații sunt $x = y,\ y + z = 1$ respectiv $y = 0,\ x = z$. Să se arate că dreptele $d_1,\ d_2$ sunt necoplanare şi să se determine ecuația planului egal depărtat de cele două drepte (cele două drepte sunt paralele cu planul şi egal depărtate de el).

Virgil Nicula

**Subiectul IV**

Fie $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$ şi $f : \mathbb{R} \to (a,b)$ o funcție bijectivă strict crescătoare. Să se demonstreze că $\lim\limits_{\substack{t\to a \\ t>a}} f\left(f^{-1}(t) + f^{-1}(x)\right) = a$, pentru fiecare $x \in (a,b)$.

Marcel Tena

*Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru efectiv 3 ore.*
*Subiectele se notează între 0 si 7 puncte.*